Πρόταση

Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-δ.χ. E και έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι διακεκριμένες ιδιοτιμές του f με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$. Τότε τα διανύσματα $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Γ.Α.)

Απόδειξη (Με Επαγωγή στο πλήθος n των ιδιοτιμών)

- Αν $n=1$ το ιδιοδιάνυσμα $\vec{x_1}$ είναι Γ.Α. επειδή $\vec{x_1} \neq \vec{0}$.
- Επαγωγική Υπόθεση: Ο ισχυρισμός είναι αληθής για $n-1$ διακεκριμένες ιδιοτιμές
- Έστω ότι έχουμε τις διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$. Έστω ότι

$k_1\vec{x_1}+\dots+k_{n-1}\vec{x_{n-1}}+k_n\vec{x_n}=\vec{0}$, όπου $k_i\in\mathbb{K}$, $1\le i\le n$

Τότε $f(k_1\vec{x_1}+\dots+k_{n-1}\vec{x_{n-1}}+k_n\vec{x_n})=\vec{0}\Rightarrow$ f γραμμική $\Rightarrow$

$f(k_1\vec{x_1})+\dots+f(k_{n-1}\vec{x_{n-1}})+f(k_n\vec{x_n})=\vec{0}\Rightarrow$

$k_1 f(\vec{x_1})+\dots+k_{n-1}f(\vec{x_{n-1}})+k_n f(\vec{x_n})=\vec{0}\Rightarrow$

$k_1\lambda_1\vec{x_1}+\dots+k_{n-1}\lambda_{n-1}\vec{x_{n-1}}+k_n\lambda_n\vec{x_n}=\vec{0}$ (1)

Πολλαπλασιάζω την σχέση (1) με την ιδιοτιμή λ_n

$k_1\lambda_n\vec{x_1}+\dots+k_{n-1}\lambda_n\vec{x_{n-1}}+k_n\lambda_n\vec{x_n}=\vec{0}$ (2)

(2) − (1) $(\lambda_n-\lambda_1)k_1\vec{x_1}+\dots+(\lambda_n-\lambda_{n-1})k_{n-1}\vec{x_{n-1}}=\vec{0}$

Από επαγωγική υπόθεση τα $\vec{x_1},\dots,\vec{x_{n-1}}$ είναι Γ.Α. ι'

άρα $(\lambda_n-\lambda_1)k_1=0,\dots,(\lambda_n-\lambda_{n-1})k_{n-1}=0$

Επειδή οι ιδιοτιμές $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ είναι διακεκριμένες, έπεται ότι $\lambda_n-\lambda_1\neq0,\dots,\lambda_n-\lambda_{n-1}\neq0$. Επομένως $k_1=0,\dots,k_{n-1}=0$.

Τότε $k_n\vec{x_n}=\vec{0}$. ($k_1\vec{x_1}+\dots+k_{n-1}\vec{x_{n-1}}+k_n\vec{x_n}=\vec{0}\Rightarrow$ επειδή $k_1=0,\dots,k_{n-1}=0$ έχω $0\vec{x_1}+\dots+0\vec{x_{n-1}}+k_n\vec{x_n}=\vec{0}\Rightarrow k_n\vec{x_n}=\vec{0}$) Επειδή $\vec{x_n}\neq\vec{0}$ ως ιδιοδιάνυσμα του f, έπεται ότι $k_n=0$. Άρα $k_1=\dots=k_n=0\Rightarrow\vec{x_1},\dots,\vec{x_n}$ Γ.Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $f: E\to E$ ένας ενδομορφισμός του E, όπου $\dim E=n$ και υποθέτουμε ότι ο f έχει n το πλήθος διακεκριμένες ιδιοτιμές. Τότε ο f είναι διαγωνοποιήσιμος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του f είναι οι $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{x_1},\dots,\vec{x_n}$.
Από την προηγούμενη Πρόταση, το σύνολο $B=\{\vec{x_1},\dots,\vec{x_n}\}$ είναι Γ.Α. και άρα είναι βάση του E, διότι $|B|=n=\dim E$.
Επειδή $f(\vec{x_1})=\lambda_1\vec{x_1},\dots,f(\vec{x_n})=\lambda_n\vec{x_n}$, έπεται ότι

$$M_B^B(f)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}\rightarrow f \text{ διαγωνοποιήσιμος}$$

Θεώρημα

Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του K-δ.χ. E και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ διακεκριμένες ιδιοτιμές του f. Τότε το άθροισμα $V(\lambda_1)+V(\lambda_2)+\dots+V(\lambda_m)$ είναι ευθύ.

Απόδειξη

Έστω $\vec{x_1}+\dots+\vec{x_m}=\vec{0}$, όπου $\vec{x_i} \in V(\lambda_i)$, $1 \le i \le m$.
Αν $\exists$ μεταξύ των $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_m}$ μη-μηδενικά διανύσματα, τότε (από υπενθύμιση) αυτά θα είναι ιδιοδιανύσματα του f, τα οποία εκ' κατασκευής αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές και άρα από την Πρόταση αυτά θα είναι Γ.Α. Άτοπο, καθώς αυτά τα διανύσματα ικανοποιούν μια σχέση γραμμικής εξάρτησης με μη-μηδενικούς συντελεστές. Επομένως, $\vec{x_1}=\dots=\vec{x_m}=\vec{0}$. Άρα το άθροισμα $V(\lambda_1)+\dots+V(\lambda_m)$ είναι ευθύ.

#ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ
Αν λ ιδιοτιμή του f, τότε $V(\lambda) = \{$ιδιοδιανύσματα του $f\} \cup \{\vec{0}\}$

Παρατήρηση (Συνδυασμός των 2 πορισμάτων)

Αν ο ενδομορφισμός $f: E \to E$ έχει n το πλήθος διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, όπου $n = \dim_K E$, τότε $E = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_n)$

Πρόταση (ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ)

Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E, $\dim_K E = n$. Τότε αν $B=\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ βάση του E και $A=(a_{ij})=M_B(f)$, θα έχουμε

$$P_f(t) = \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-t \end{vmatrix} = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο (Χ.Π.) της f.

$\deg P_f(t) = n = \dim_K E$. Οι ιδιοτιμές της f είναι οι ρίζες του $P_f(t)$

(t-ρ) διαιρεί $P(t)$

λ ρίζα του $P(t) \Leftrightarrow t-\rho \mid P(t)$, δηλαδή $\exists$ πολυώνυμο $Q(t)$ τ.ω. $P(t)=(t-\lambda)Q(t)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

→ πολλαπλότητας κ

Το $\lambda \in K$ είναι ρίζα του $P(t)$ πολ/λας $k \Leftrightarrow (t-\lambda)^k \mid P(t)$ και $(t-\lambda)^{k+1} \nmid P(t)$, δηλαδή $\exists$ πολυώνυμο $Q(t)$ $P(t)=(t-\lambda)^k Q(t)$ και $t-\lambda \nmid Q(t)$

↳ (t-λ) δεν διαιρεί Q(t)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του f, τότε:

1) Η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ είναι η πολ/τα της λ ως ρίζας του $P_f(t)$

2) Η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ ορίζεται να είναι $\dim_K V(\lambda)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Ισχύει ότι $1 \leq \dim_K V(\lambda) \leq$ αλγεβρική πολ/τα της λ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\dim_K V(\lambda)=m$ και έστω $B=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_m}\}$ βάση του $V(\lambda)$, την οποία επεκτείνουμε σε μια βάση $C=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_m},\vec{e}_{m+1},\dots,\vec{e_n}\}$ του χώρου E

$f(\vec{e_1})=\lambda\vec{e_1}+0\vec{e_2}+\dots+0\vec{e_m}+0\vec{e}_{m+1}+\dots+0\vec{e_n}$

$\vdots$

$f(\vec{e_m})=0\vec{e_1}+0\vec{e_2}+\dots+\lambda\vec{e_m}+0\vec{e}_{m+1}+\dots+0\vec{e_n}$

$f(\vec{e}_{m+1})=a_{1m+1}\vec{e_1}+\dots\dots+a_{nm+1}\vec{e_n}$

$\vdots$

$f(\vec{e_n})=a_{1n}\vec{e_1}+\dots\dots+a_{nn}\vec{e_n}$

$$M_c^c(f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & \cdots & 0 & a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & B & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{(m+1)(m+1)} & \cdots & a_{(m+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \Gamma & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nm+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

$$P_f(t) = |A - tI_n| = \left|\begin{array}{cccc|ccc} \lambda - t & 0 & \cdots & 0 & a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda - t & \cdots & 0 & a_{2m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & B & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - t & a_{m\,m+1} & \cdots & a_{mn} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(m+1)(m+1)} - t & \cdots & a_{(m+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \Gamma - tI_{n-m} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n(m+1)} & \cdots & a_{nn} - t \end{array}\right|$$

$= (\lambda - t)^m \cdot |\Gamma - tI_{n-m}|$

Θεωρούμε $Q(t) = |\Gamma - tI_{n-m}|$. Τότε $P_f(t) = (\lambda - t)^m Q(t)$

Έστω ότι το λ εμφανίζεται ως ρίζα του $Q(t)$ με πολλ/τα $\rho \geq 0$. Τότε $Q(t) = (\lambda - t)^\rho R(t)$, όπου $(\lambda - t) \nmid R(t)$

Τότε $P_f(t) = (\lambda - t)^{m+\rho} R(t)$, όπου το λ δεν είναι ρίζα του $R(t)$, $\rho \geq 0$. Τότε η αλγεβρική πολλ/τα της λ είναι $m + \rho \geq m = \dim_K V(\lambda)$ γεωμετρική πολλ/τα της λ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$f : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t]$, $f(P(t)) = P'(t)$

$\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ κανονική βάση του $\mathbb{R}_n[t]$.

$f(1) = 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \ldots + 0t^n$

$f(t) = t' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \ldots + 0t^n$

$\vdots$

$f(t^n) = (t^n)' = nt^{n-1} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \ldots + nt^{n-1} + 0 \cdot t^n$

Άρα $A = M_{\beta}^{\beta}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$P_f(t) = |A - tI_{n+1}| = (-1)^{n+1} t^{n+1}$

Η μόνη ιδιοτιμή του f είναι η $\lambda = 0$ με πολ/τα $= n+1$.

Γεωμετρική πολ/τα της $\lambda = \dim_{\mathbb{R}} V(0)$

$V(0) = \{ P(t) \in \mathbb{R}_n[t] \mid f(P(t)) = 0,\ P(t) = 0 \} = \{$σταθερό πολυώνυμο$\}$

επειδή:

$P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k \in V(0) \Rightarrow f(P(t)) = P'(t) = 0 \Rightarrow$

$a_1 + \dots + k a_k t^{k-1} = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0 \Rightarrow$

$P(t) = a_0$ σταθερό πολυώνυμο.

Άρα $\dim_{\mathbb{R}} V(0) = 1$